2 今回はパスカルの三角形に似ている三角形を作ってみた。図１は「パスカルの三角形」そのもので，図２が今回作った三角形である。「積和の三角形」とでも名付けよう。

図１　パスカルの三角形

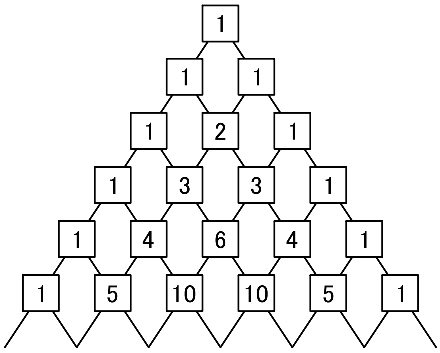
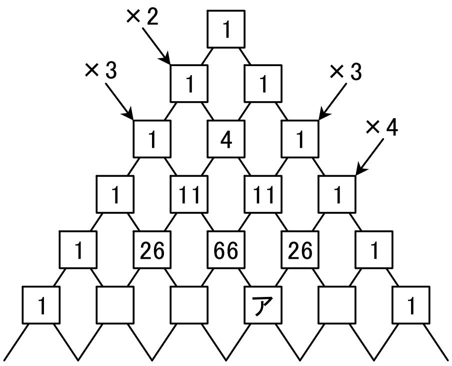


図２　積和の三角形



パスカルの三角形は，左上と右上の数を加えたが，積和の三角形では，それぞれの経路に特別の倍率をかけて加えるという操作をする。一番端の通りから順に１倍，２倍，３倍･･･となる。例えば図２の（ア）に当たる数は（　(1)　）となる。

さて結果が左右対称になるのは明らかだ。横に並んだ同じ段の数を合計すると，パスカルの三角形では上からｍ段目が（　(2)　）であるが，積和の三角形は（　(3)　）になる。

ここで，積和の三角形の３段目の１，４，１をとって横に並べ，さらにそのあとに０が並ぶと考える。次に，左端から１個ずつ加算してその都度合計をその下に書くとする。それを書いたのが下図である。

1	4	1	0	0	0	･････
1	5	6	6	6	6	･････
1	6	12	18	24	30	･････

すると，上から５段目にはどんな数字が並ぶかというと（　(4)　）が並ぶ。当然のことながら 6 段目は（　(5)　）を表している。

最初に，1，11，11，１を使うと 6 段目に並ぶ数は，（　(6)　）が並ぶ。

(7)　次に，パスカルの三角形が

①　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

②　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　のように，

$(a+b)^n$ の係数を表しているので，$(a+b+c)^n$ は立体になるのではないかと考えて，下の図の三角錐を作ってみた。すると，不都合な点が浮かび上がってきた。その不都合な点を示し，それを解消する方法を図３を参考に答えよ。

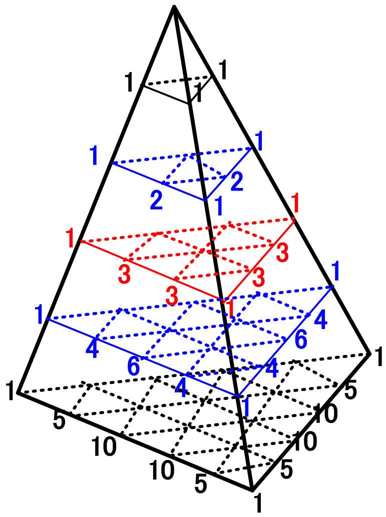


図３

（答）

(1)　$66\times3+26\times4=302$

(2)　2^{m-1}

(3)　$m!$

(4)　$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ \cdots$

(5)　$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3$

(6)　$1^4,\ 2^4,\ 3^4,\ 4^4,\ \cdots$

(7)　図３の三角錐では，

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3b^2c+3c^2a+3ab^2+3bc^2+3ca^2+6abc$

$(a+b+c)^4=a^4+b^4+c^4+4a^3b+4b^3c+4c^3a+4ab^3+4bc^3+4ca^3+6a^2b^2$
$+6b^2c^2+6c^2a^2+12a^3bc+12b^3ca+12c^3ab$

$(a+b+c)^5$
$=a^5+b^5+c^5+5a^4b+5b^4c+5c^4a+5ab^4+5bc^4+5ca^4+10a^3b^2$
$+10b^3c^2+10c^3a^2+10a^2b^3+10b^2c^3+10c^2a^3+20a^3bc+20b^3ca$
$+20c^3ab+30a^2b^2c+30b^2c^2a+30c^2a^2b$

の係数で記載しきれないものが存在する。

3 乗⇒$6abc$

4 乗⇒$12a^3bc+12b^3ca+12c^3ab$

5 乗⇒$20a^3bc+20b^3ca+20c^3ab+30a^2b^2c+30b^2c^2a+30c^2a^2b$

等である。そこで，図４のように考える。立体の内部に数を対応させて，例えば，図４の最下段で示された部分では，４＋４＋１２＝２０　という関係が成り立つ。

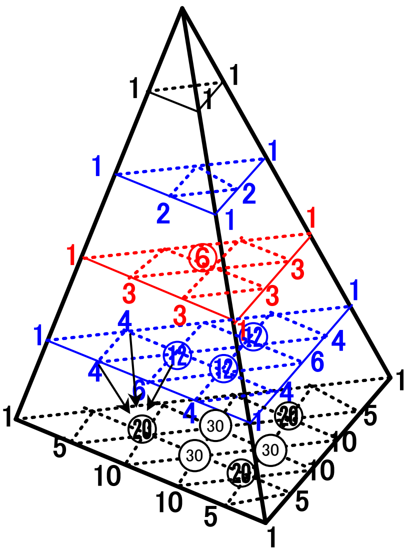


図４

つまり，**「ある数は、その１つ上の行の隣接する３つの数の和によって求まる」**と考えれば，パスカルの三角形を，立体に拡張できる。